Détermination de la constante de gravitation avec la balance de gravitation selon Cavendish

Mesure des déviations avec un spot lumineux

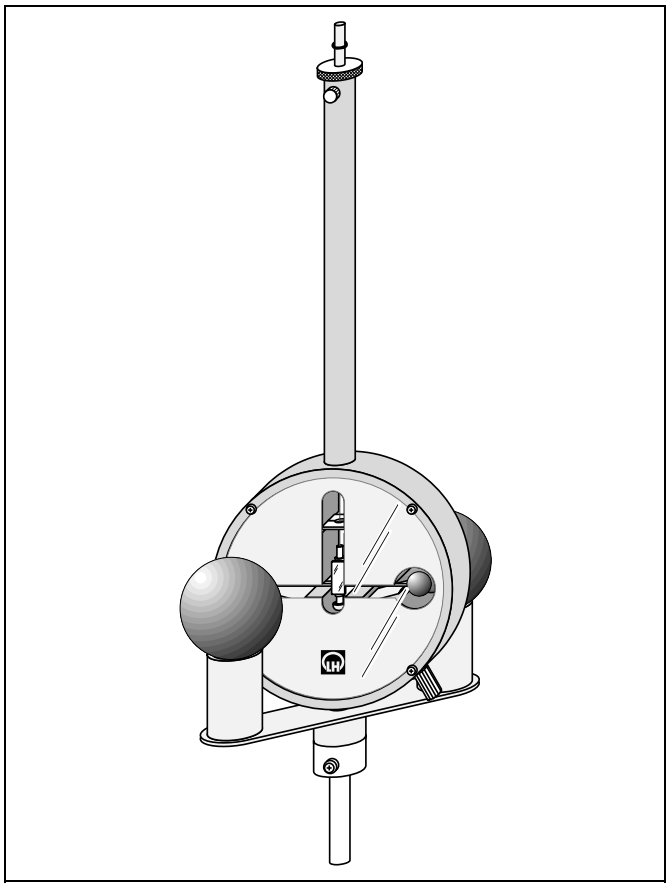
Objectifs expérimentaux

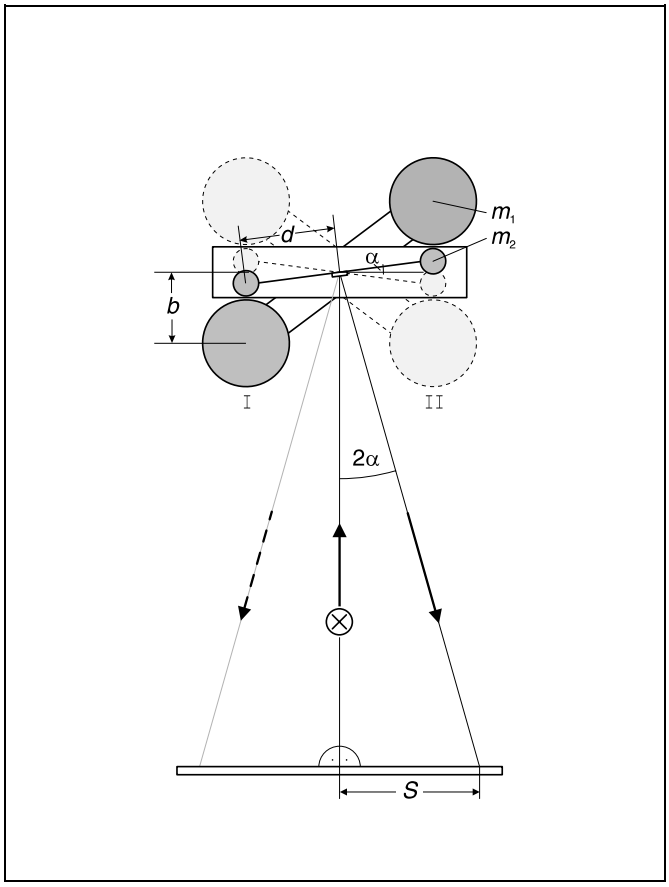
- Détermination de la position d'équilibre initiale du pendule de torsion
- Relevé de l'évolution temporelle des oscillations amorties à la position d'équilibre finale du pendule de torsion
- Détermination de la position d'équilibre finale du pendule de torsion selon la méthode de la pleine déviation
- Calcul de la constante de gravitation *G* à partir de la période d'oscillation et de la différence des positions d'équilibre
- Détermination de la constante de gravitation *G* selon la méthode de l'accélération

Principes de base

La pièce principale de la balance de gravitation selon Cavendish est une légère traverse accrochée à l'horizontale à un mince fil de torsion, aux extrémités de laquelle il y a une petite sphère de plomb de masse m_2 à une distance d du point de suspension. Ces sphères sont attirées par deux grandes sphères de plomb de masse m_1. Bien que la force d'attraction soit de moins de 10^{-9} N, elle peut être mise en évidence avec la balance de torsion d'une extrême sensibilité. On observe et on mesure le mouvement des petites sphères de plomb par le biais d'un spot lumineux (voir fig. 1) généré avec un miroir concave éclairé, fixé rigidement à la traverse du pendule de torsion. C'est à partir de la variation temporelle du mouvement, de la masse m_1 et de la géométrie du dispositif que l'on détermine la constante de gravitation soit selon la méthode de la pleine déviation, soit – pour des procédés de mesure écourtés – selon la méthode de l'accélération.

Fig. 1: Balance de gravitation selon Cavendish et représentation schématique du spot lumineux





Matériel

1 balance de gravitation	332 101
1 laser He-Ne, à polarisation rectiligne	471 840
1 chronomètre de table	313 05
1 mètre ruban, 2 m	311 77
1 petit pied en V	300 02
1 noix double à pinces tournantes	301 03
1 noix Leybold	301 01
1 tige, 47 cm	300 42

Méthode de la pleine déviation

Pour la méthode de la pleine déviation, on part du principe suivant: la force de gravitation entre deux sphères en plomb de masse m_1 et deux sphères en plomb de masse m_2 à une distance b est de

$$F = G \cdot \frac{m_1 m_2}{b^2} \qquad \text{(I)}.$$

Sur le pendule de torsion, le couple agit alors comme suit

$$M_\mathrm{I} = 2\,F \cdot d = 2\,G \cdot \frac{m_1 m_2}{b^2}\,d \qquad \text{(II)}$$

si les grandes sphères en plomb sont en position I (voir fig. 1). Le couple est compensé par le couple antagoniste du fil de torsion; le pendule se met en position d'équilibre α_I.

En faisant balancer les grandes sphères pour les amener à la position II, on inverse symétriquement les forces. Il y a maintenant un couple $M_\mathrm{II} = -M_\mathrm{I}$ d'actif. Le pendule effectue des oscillations amorties de part et d'autre de la nouvelle position d'équilibre α_II. Pour la différence des deux couples, on a

$$D \cdot (\alpha_\mathrm{I} - \alpha_\mathrm{II}) = M_\mathrm{I} - M_\mathrm{II} = 2\,M_\mathrm{I} \qquad \text{(III)}.$$

La grandeur directionnelle de l'angle D peut se définir à partir de la période d'oscillation T et du moment d'inertie J du pendule de torsion:

$$D = J \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} \qquad \text{(IV)}$$

On met le moment d'inertie J sur le même plan que le moment d'inertie des deux petites sphères

$$J = 2\,m_2 \cdot d^2 \qquad \text{(V)}.$$

(IV) devient alors

$$D = m_2 \cdot d^2 \cdot \frac{8\pi^2}{T^2} \qquad \text{(VI)}.$$

Remarque de sécurité

Le laser He-Ne répond aux exigences techniques à satisfaire en matière de sécurité pour le matériel didactique et pédagogique «Laser: DIN 58126, 6ème partie» pour des lasers de la classe 2. Si les remarques correspondantes stipulées dans le mode d'emploi sont observées, l'expérimentation avec le laser He-Ne ne présente aucun danger.

- Ne pas fixer le regard sur le faisceau direct ou réfléchi
- Eviter de dépasser la limite d'éblouissement (c.-à-d. qu'aucun observateur ne doit avoir l'impression d'être ébloui).

A partir de (II), (III) et (VI), on obtient

$$G = \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{2\pi^2}{T^2} \cdot (\alpha_\mathrm{I} - \alpha_\mathrm{II}) \qquad \text{(VII)}.$$

Mesure de l'angle de rotation α:

La fig. 1 illustre la mesure de l'angle de rotation α à l'aide du spot lumineux: Le faisceau d'éclairage du spot lumineux est ici perpendiculaire à la position zéro du pendule (c.-à-d. la position de repos sans les grandes sphères en plomb). La position du spot lumineux pour la position de repos correspond au zéro de l'échelle. Le rapport entre l'angle de rotation α, la position du spot lumineux S et la distance L_0 entre l'échelle et le pendule de torsion est le suivant

$$\tan 2\alpha = \frac{S}{L_0}$$

et

$$\alpha = \frac{S}{2\,L_0} \qquad \text{(VIII)},$$

vu que l'angle α est très petit.

Sur la fig. 2, le miroir concave est éclairé sous l'angle horizontal β. La position du spot lumineux 0 pour la position zéro du pendule de torsion est à la distance L_1 du point N de la verticale et à la distance

$$L = \sqrt{L_0^2 + L_1^2}$$

du miroir concave. Pour une rotation du pendule de torsion d'un angle α hors de la position zéro, on trouve les rapports

$$S' = L \cdot \tan 2\alpha$$

et

$$\frac{S'}{S} = \frac{\sin(90^\circ - \beta + 2\alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha)} = \cos\beta - \tan 2\alpha \cdot \sin\beta$$

L'angle α est dans tous les cas très petit (il est de maximum 1,5°); les dimensions de la balance de gravitation ne permettent pas d'angle d'éclairement β de plus de 30°.

L'approximation

$$\frac{S'}{S} = \cos\beta = \frac{L_0}{L}$$

est donc admissible. Avec l'approximation supplémentaire $2\alpha = \tan 2\alpha$, on a au total

$$\alpha = \frac{S}{2} \cdot \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \qquad \text{(IX)}.$$

L'équation (IX) est affectée d'une erreur systématique de 1 à 2 %; lors du calcul de la différence des deux positions d'équilibre $\alpha_\mathrm{I} - \alpha_\mathrm{II}$, cette erreur systématique est quasiment entièrement compensée.

Dans le cas particulier de l'éclairage sous l'angle $\beta = 0°$, il faut définir $L_1 = 0$ et on obtient l'équation (VIII) déjà dérivée à partir de (IX).

L'équation (IX) est aussi valable si le faisceau d'éclairage est basculé vers le haut ou vers le bas. Dans ce cas aussi, on met l'échelle de lecture à l'horizontale et on ne tient pas compte des changements de hauteur du spot lumineux.

La position zéro du pendule de torsion, soit le point O à la fig. 2, n'est en principe pas connue avant la réalisation de l'expérience. Pour la détermination de L_1, on mesure donc avec une bonne approximation la distance entre le point N de la verticale et la position du spot lumineux pour la position d'équilibre I. Cette approximation est permise étant donné que $|\alpha| << 1$. En cas d'éclairage pas trop incliné du miroir concave, donc pour $\beta << 1$, $L_1 = 0$ peut être accepté.

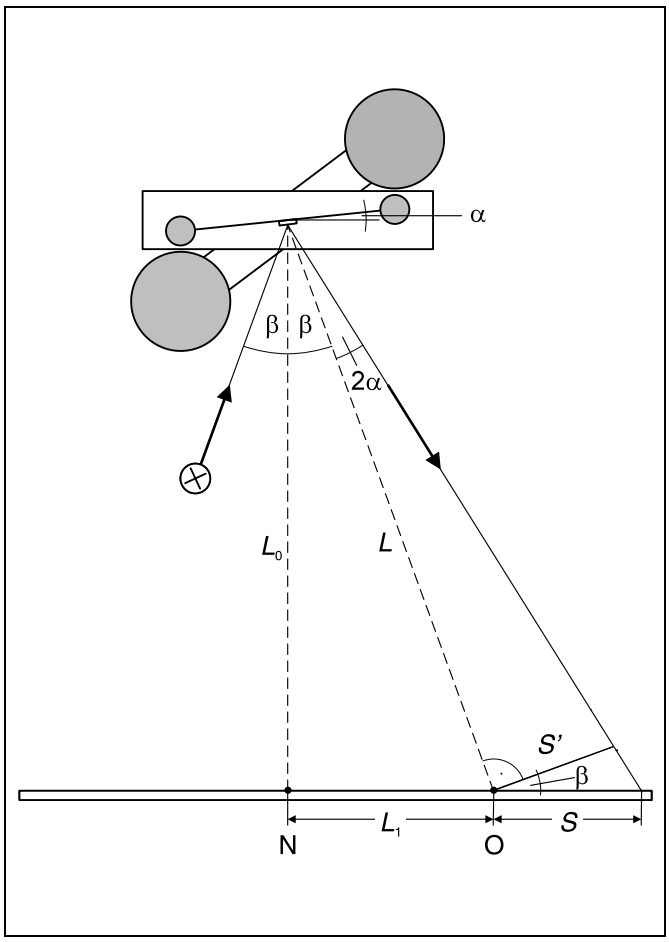
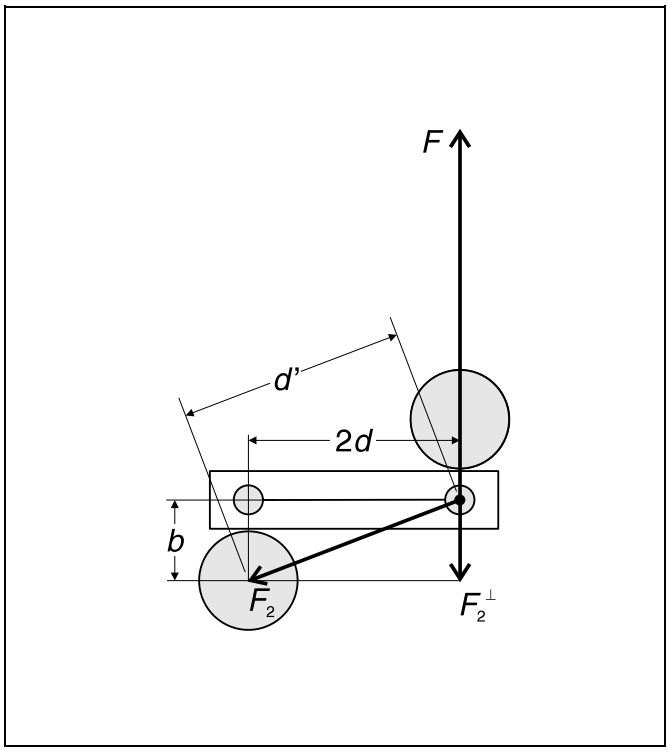


Fig. 2: Schéma pour la détermination de la déviation avec le spot lumineux

Fig. 3: Schéma pour le calcul du couple antagoniste par la «deuxième» sphère en plomb



Equation déterminative pour la méthode de la pleine déviation:

A partir de (VII) et (IX), on obtient l'équation déterminative suivante pour la constante de gravitation:

$$G = \pi^2 \cdot \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{S_I - S_{II}}{T^2} \cdot \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \qquad (X)$$

Les grandeurs m_1 = 1,5 kg, d = 50 mm et b = 47 mm sont des constantes de l'appareil. Les valeurs à mesurer sont la période d'oscillation T du pendule de torsion, l'écartement des deux positions du spot lumineux S_I et S_{II} pour les positions d'équilibre α_I et α_{II} et la géométrie du spot lumineux. La détermination de S_I et S_{II} est expliquée plus tard à l'appui d'un exemple.

Couple antagoniste de la «deuxième» sphère en plomb:

En plus du couple généré par la force d'attraction F de la grande sphère en plomb directement opposée (distance b), il est généré un couple antagoniste par la force d'attraction F_2 de la sphère la plus éloignée (distance d') (voir fig. 3). Pour le couple M_I, on a donc plus exactement que ce qui est donné dans (II)

$M_I = 2\,(F + F_2^{\perp}) \cdot d$,

avec

$$F_2^{\perp} = -F_2 \cdot \frac{b}{d'}$$

comme composante appliquée perpendiculairement à la traverse de la force

$$F_2 = F \cdot \frac{b^2}{d'^2}$$

(voir (I)). La constante de gravitation G est donc plus grande du facteur de correction

$$K = \frac{F}{F + F_2^{\perp}} = \frac{1}{1 - \frac{b^3}{d'^3}} \qquad (XI)$$

que lorsqu'elle est calculée selon (X). Avec

$d' = \sqrt{(2d)^2 + b^2}$,

on calcule la valeur numérique K = 1,083.

Méthode de l'accélération:

Juste après le passage des grandes sphères en plomb de la position I à la position II, le fil de torsion vrillé exerce le couple antagoniste $-M_I$ sur la traverse si bien qu'en tout, le couple $2M_{II}$ agit sur la traverse. Cela provoque une accélération angulaire

$$\ddot{\alpha} = \frac{2M_{II}}{J},$$

dont on peut dire avec certitude qu'elle reste constante pendant la première minute qui succède au changement de position. On a alors à ce moment-là

$$\alpha = \alpha_I + \frac{M_{II}}{J} \cdot t^2 \qquad (XII)$$

A partir de (II), (V) et (XII), on obtient

$$G = \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{\alpha - \alpha_I}{t^2},$$

valeur à partir de laquelle on calcule avec (IX)

$$G = \frac{b^2 \cdot d}{m_1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{S - S_I}{t^2} \cdot \frac{L_0}{L_0^2 + L_1^2} \qquad (XIII)$$

Avec la méthode de l'accélération, il est donc mesuré le changement $S - S_I$ de la position du spot lumineux en fonction du temps t ainsi que la géométrie du spot lumineux.

Montage

Important: Il n'est possible d'obtenir des résultats d'expérience satisfaisants que si le pendule de torsion est parfaitement ajusté et que si les oscillations de torsion occasionnées par l'attraction des masses ne sont pas affectées par des mouvements fortuits du pendule. Le pendule de torsion est très sensible aux secousses auxquelles est soumis le boîtier de la balance de gravitation. Des variations de la température occasionnent dans le boîtier de la balance des convections à l'origine de mouvements inopportuns du pendule de torsion d'où la nécessité:

de choisir un montage stable sur une paroi solide.

de choisir un lieu d'expérimentation à l'abri des rayons du soleil et des souffles d'air.

Au balancement du porte-sphères, il faut absolument éviter les secousses du boîtier en faisant buter les sphères de plomb.

Le montage est représenté à la fig. 4.

Montage de la balance de gravitation avant la première mise en service:

- Cheviller correctement la vis de 8 mm, accrocher le petit pied par le trou au sommet et l'orienter parallèlement au mur grâce à ses vis de réglage (voir mode d'emploi).
- Fixer la tige.
- Fixer la balance de gravitation (d'abord sans les grandes sphères en plomb) avec suffisamment d'espace pour le balancement du bras support des sphères en plomb.
- Orienter la balance de gravitation aussi verticalement que possible et avec les plaques en verre du boîtier parallèles au mur pour l'échelle de lecture.
- Débloquer le dispositif d'arrêt du pendule de torsion et corriger l'orientation jusqu'à ce que la tige à l'extrémité du pendule pende au milieu du trou de la tige et que le pendule de torsion puisse osciller librement.
- Laisser le pendule de torsion suspendu pendant 1 ou 2 jours et si besoin est, ajuster le point zéro (voir mode d'emploi).

Spot lumineux:

- Monter le laser avec la noix à pinces tournantes à environ 35 cm et l'orienter vers le miroir concave; veiller à ce que les grandes sphères en plomb ne puissent pas cacher la marche des rayons du spot lumineux ni en position I, ni en position II.
- Poser les sphères en plomb et balancer le bras support pour le mettre en position I.
- Vérifier que le montage soit bien d'aplomb.

Remarque: Pour une distance de 10 m entre la balance de gravitation et l'échelle, la distance entre les deux positions extrêmes est sur l'échelle d'environ 35 cm, au total, le spot lumineux parcourt une zone d'environ 1 m.

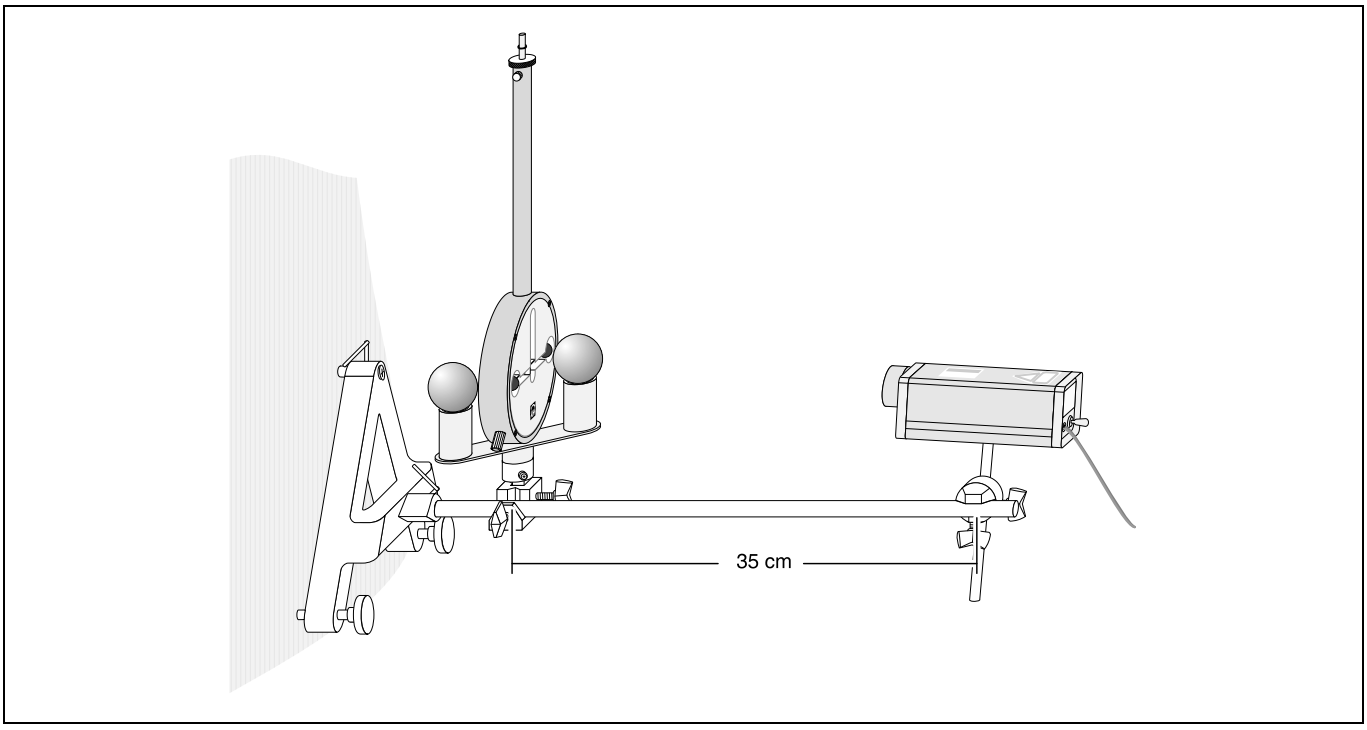
- Coller l'échelle horizontalement sur la paroi prévue à cet effet ou sur une surface stable de façon à ce que la position I du spot lumineux soit à environ 35 cm ou que la position II soit à 65 cm.

Réalisation

d'abord:

- Laisser reposer le dispositif pendant au moins deux heures à l'abri des secousses de façon à ce que le pendule puisse osciller pour prendre sa position d'équilibre (si le dispositif d'arrêt est débloqué au bout d'un laps de temps assez grand, il se peut qu'il faille attendre plus longtemps pour que la position d'équilibre stable soit atteinte.)
- Vérifier la stabilité du point zéro.
- Observer les variations du point zéro pendant au moins 10 minutes.
- Mesurer et noter la distance L_0 entre le pendule de torsion et la paroi, et la distance L_1 entre le point N du fil et la position S_I (voir fig. 2).

Fig. 4: Montage expérimental avec fixation au mur



a) Méthode de la pleine déviation:

– Attendre la position d'équilibre stable; déterminer et relever S_I.
– Balancer rapidement mais prudemment le support avec les sphères en plomb pour l'amener de la position I à la position II puis mettre le chronomètre en route.
– Relever et noter la position du spot lumineux sur l'échelle sur au moins 3 périodes d'oscillation et au moins toutes les 30 s.

Détermination alternative de S_I:

– Ramener le support avec les sphères en plomb de la position II à la position I et recommencer la mesure.

b) Méthode de l'accélération:

– Attendre la position d'équilibre stable; déterminer et relever S_I.
– Balancer rapidement mais prudemment le support avec les sphères en plomb pour l'amener de la position I à la position II puis mettre le chronomètre en route.
– Relever et noter la position du spot lumineux sur l'échelle sur 1 période d'oscillation et au moins toutes les 10 s.

Exemple de mesure

L_o = 6385 mm, L_1 = 1370 mm

Le point zéro de l'échelle ne coïncide pas (ainsi que supposé sur les fig. 1 et 2) avec la position du spot lumineux pour la position zéro du pendule de torsion. L_1 est la distance entre la position S_1 du spot lumineux et le point N de la verticale.

a) Méthode de la pleine déviation:

S_I = 650 mm

Tab. 1: Déviations extrêmes S du spot lumineux après le balancement des grandes sphères en plomb dans la position II

N°	$\frac{S}{\text{mm}}$
1	248
2	551
3	315
4	496
5	355
6	407
7	405

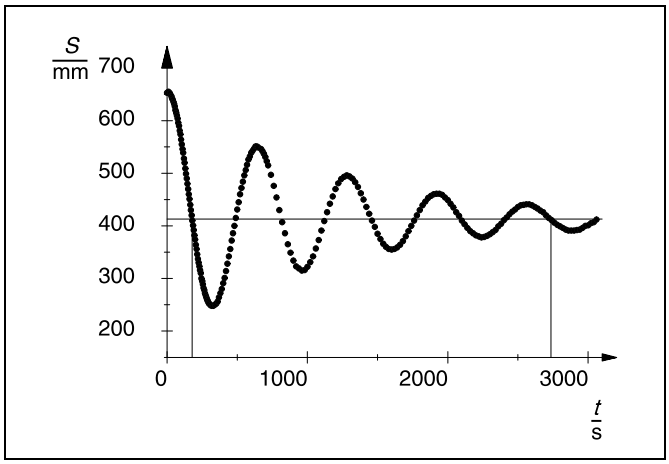


Fig. 5: Oscillations de la balance de gravitation de part et d'autre de la position d'équilibre finale S_{II}

b) Méthode de l'accélération

S_I = 650 mm

Tab. 2: Positions S du spot lumineux à la première minute après le balancement des grandes sphères en plomb dans la position II

$\frac{t}{\text{s}}$	$\frac{S}{\text{mm}}$
0	653
10	655
20	652
30	647
35	643
40	640
45	636
50	632
55	627
60	620

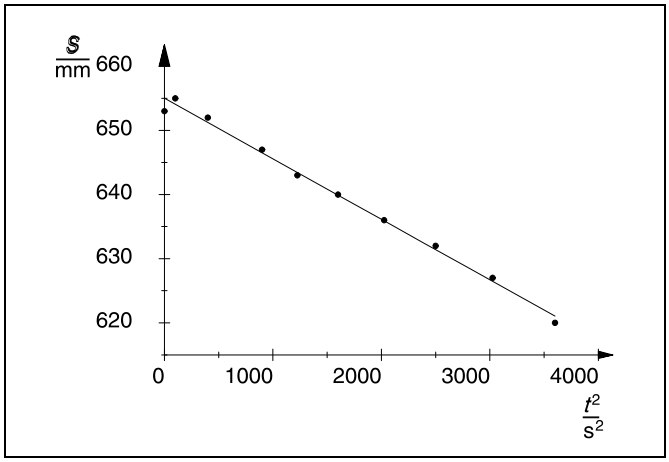


Fig. 6: Positions S du spot lumineux en fonction de t^2 durant la première minute qui succède au balancement des grandes sphères en plomb

Exploitation et résultats

Constantes de l'appareil:

m_1 = 1,5 kg
d = 50 mm
b = 47 mm
Facteur de correction K = 1,083

a) Méthode de la pleine déviation:

La fig. 5 donne la durée de quatre périodes d'oscillation à partir desquelles on calcule T = 639 s.

On calcule la position d'équilibre S_{II} à partir des cinq premières déviations extrêmes $s^{(1)}$ -$S^{(5)}$ du spot lumineux (voir tab. 1):

$$S_{II} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{S^{(1)} + S^{(3)} + S^{(5)}}{3} + \frac{S^{(2)} + S^{(4)}}{2} \right) = 415 \text{ mm}$$

L'équation (X) donne sans correction

$$G = 6{,}29 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

et avec correction

$$G = 6{,}81 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Valeur littéraire: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$

b) Méthode de l'accélération:

La fig. 6 montre le rapport linéaire entre la position S du spot lumineux et le carré du temps t à la première minute qui suit la commutation. La pente a la valeur

$$\frac{S_I - S}{t^2} = 9{,}4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mm}}{\text{s}^2}$$

L'équation (XIII) donne sans correction

$$G = 5{,}2 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

et avec correction

$$G = 5{,}6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Comme l'accélération des sphères en plomb diminue peu à peu suite à la baisse de la torsion du fil, l'adaptation de la droite pour la détermination du quotient

$$\frac{S - S_I}{t^2}$$

est affectée d'une erreur systématique. Une observation plus précise montre que cette erreur est d'environ –7,5 % s'il est saisi un dixième de la période d'oscillation T, donc environ 60 s.

La correction de cette erreur donne la valeur

$$G = 6{,}0 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Information supplémentaire

L'indication de la distance b = 47 mm va de paire avec la supposition que les petites sphères en plomb sont au milieu du boîtier et que les grandes sphères en plomb touchent la paroi extérieure.

Si pour le calcul de la force de gravitation dans (I), on considère la variation de la distance due à l'oscillation du pendule (en position d'équilibre, la distance est de 4 à 5 mm plus petite), il y a alors un changement aussi bien du résultat pour les positions d'équilibre (III) que pour le rapport entre la grandeur directionnelle de l'angle D et la période d'oscillation T (IV). Un calcul exact montre que les deux influences s'annullent réciproquement et que (VII) est exact avec une très bonne approximation.

A l'exploitation, il faut par contre tenir compte d'une éventuelle distance entre la paroi extérieure et les grandes sphères en plomb. Une distance supplémentaire de 1 mm de plus fausse le résultat pour la constante de gravitation en donnant des valeurs plus grandes d'environ 4 %. Comparé à cela, il est possible de négliger l'influence d'un mauvais ajustage du zéro du pendule.

© by Leybold Didactic GmbH
Printed in the Federal Republic of Germany
Technical alterations reserved